Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Stäckel, Paul** (1862–1919)

Titel: **Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen.**

Quelle: Bibliotheca mathematica.
3. Folge, Band 8 (1907-08),
Seite 37 – 60.

Die im Titel angedeutete Abhandlung: „Démonstration de la somme de cette suite $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ etc.“ wurde 1743 in der Zeitschrift „Journal littéraire d'Allgemeine, de Suisse et du Nord“ veröffentlicht und ist hier (S. 54–60) von *Stäckel* neu herausgegeben. Voran geht eine ausführliche historische Einleitung, die sich auf die Geschichte der fraglichen Reihe bezieht. Schon im 17. Jahrhundert ist die Reihe beiläufig erwähnt worden (z.B. von *Jakob Bernoulli*), und einen Näherungswert der Summe der Reihe berechnete *Stirling* (1730), aber den exakten Wert $\frac{\pi^2}{6}$ fand erst Euler 1736. Später beschäftigte sich Euler wiederholt mit der Reihe und summierte dieselbe durch verschiedene Verfahren. Zwei solcher Verfahren werden in der „Démonstration“ benutzt, von denen das erste aus einem Briefe (1737) von *Euler* an *Johann Bernoulli* bekannt ist, aber im Druck nur in der „Démonstration“ vorkommt. Bei dem andern Verfahren geht *Euler* von der Differentialgleichung

$$(1 - x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - x\,\frac{dy}{dx} = 1$$

aus, der die Funktion $y = \frac{(\arcsin x)^2}{2}$ genügt, und leitet durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$\frac{(\arcsin x)^2}{2} = y = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{x^6}{6} + \cdots$$

her. Dann multipliziert er mit $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ und auf der rechten Seite kann jedes Glied integriert werden. Setzt man zuletzt $x = 1$ und dividiert durch $\pi/8$, so erhält man das gesuchte Resultat. Dies Verfahren ist, soweit bekannt, von *Euler* nur in der „Démonstration“ benutzt worden, und da diese sich in einer den mathematisch-historischen Forschern fast unzugänglichen Zeitschrift findet, ist das Verfahren bisher unbeachtet geblieben.

(Rezension von Gustaf Eneström (1852–1923) im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 38, 1907)

Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen.

Von PAUL STÄCKEL in Hannover.

1.

In dem Verzeichnisse EULERscher Abhandlungen, das NICOLAUS FUSS der Gedächtnisrede auf seinen Großvater beigefügt hat[1]), wird eine Abhandlung: *Découverte d'une loi extraordinaire des nombres* angeführt, die in dem Journal littéraire de l'Allemagne, Mois de Janvier et Février 1751 erschienen sein sollte. Als sechzig Jahre später NICOLAUS FUSSens Sohn PAUL HEINRICH V. FUSS die Herausgabe der *Opera minora* EULERS in Angriff nahm, die über die 1849 veröffentlichten *Commentationes arithmeticae* hinauszuführen ihn leider die Ungunst der Zeiten und ein früher Tod verhindert haben, da konnte er sich diese seltene Zeitschrift auf keine Weise verschaffen. Schließlich wandte er sich am 19. April 1844 an GAUSS, der ihn im vorhergehenden Jahre in Göttingen freundlich aufgenommen hatte[2]), „in der Hoffnung auf die so reiche und vollständige Göttinger Bibliothek". Wie die beiden langen Briefe an FUSS vom 8. und 15. Mai 1844 zeigen, hat sich GAUSS der Anfrage aufs sorgfältigste angenommen; war er doch, wie er am 16. September 1849 nach Empfang der *Commentationes* an FUSS schreibt, der Überzeugung, daß „das Studium aller EULERschen Arbeiten die beste durch nichts anderes zu ersetzende Schule für die verschiedenen mathematischen Gebiete bleiben wird"[3]).

---

1) *Éloge de M. LÉONARD EULER, lu a l'Académie Imperiale des Sciences, dans son Assemblée du 23 octobre 1783, avec une liste complette des Ouvrages de M. EULER,* Nova Acta Petrop. 1, ad annum 1783 [1787]; Histoire S. 159—212; auch besonders erschienen Petersburg 1783, deutsche Ausgabe Berlin 1786. NICOLAUS FUSS (1755—1826) hatte eine Tochter des ältesten Sohnes von LEONHARD EULER, JOHANN ALBRECHT EULER (1734—1800), geheiratet.

2) Schon NICOLAUS FUSS hatte mit GAUSS in Beziehungen gestanden; im besonderen hat er mit GAUSS über dessen Berufung nach Petersburg verhandelt. P. H. v. FUSS hatte im Februar 1843 an GAUSS die von ihm herausgegebene *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIième siècle,* 2 Teile (Petersburg 1843) gesandt; das GAUSS-Archiv in Göttingen besitzt 6 Briefe von ihm an GAUSS.

3) Die drei genannten Briefe von GAUSS an P. H. v. FUSS hat kürzlich ein Neffe von diesem, Herr Geheimrat VIKTOR FUSS in Petersburg, dem GAUSS-Archiv als Geschenk überwiesen; vgl. meine Note: *Vier neue Briefe von GAUSS* in den Göttinger Nachrichten, Jahrgang 1907, S. 372.

GAUSS stellte fest, daß die Göttinger Bibliothek die ganze Folge der Zeitschrift besitzt, die vierzig Jahre hindurch unter zweimaligem Wechsel von Titel und Verlagsort erschienen ist, nämlich 1720—1741 als Bibliothèque germanique zu Amsterdam (50 Tomes), 1741—1743 als Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord zu Haag (2 Tomes zu je 2 Parties) und 1746—1760 als Nouvelle bibliothèque germanique wieder zu Amsterdam (26 Tomes). Den Inhalt der 78 Tomes bilden im wesentlichen Berichte über neu erschienene Bücher und Akademieschriften. Eine Abhandlung des angegebenen Titels ist darin nicht zu finden, wohl aber enthält die 1. Partie des Tome II des Journals, die die Jahreszahl 1743 trägt, auf S. 115—127 einen kleinen mathematischen Originalaufsatz mit der Überschrift:

Démonstration de la somme de cette Suite

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{etc.}$$

Der Verfasser ist nicht angegeben; er fehlt auch in dem am Schlusse des Bandes stehenden Inhaltsverzeichnis. Daß jedoch die Abhandlung von EULER herrührt, „erhellet“, wie GAUSS bemerkt, „sogleich aus den Anfangsworten 'la méthode que j'ai donnée dans les Commentaires de l'Académie de Pétersbourg, pour trouver la somme de cette suite, lorsque l'exposant n est un nombre pair

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\text{etc.}$$

a quelque chose d'extraordinaire usw.' in Verbindung mit der späterhin vorkommenden näheren Bezeichnung des betreffenden Bandes als T. VII, in welchem Bande sich wirklich die bezogene Abhandlung unter EULERS Namen befindet“[1]).

So hatte GAUSS statt der gesuchten eine bisher unbekannte Abhandlung EULERS entdeckt. Welches Interesse er daran nahm, zeigt der Umstand, daß er die Mühe nicht gescheut hat, die Abhandlung für FUSS eigenhändig abzuschreiben, damit sie „in der neuen Ausgabe reproduciert werde“. „Ein gewöhnlicher Abschreiber“, äußert er sich in dem Brief vom 15. Mai 1844, „würde allerdings nicht wohl dazu befähigt sein, oder

1) Der erst 1740 erschienene Band VII der Comment. Petrop. für 1734/35 enthält S. 123 EULERS Abhandlung: *De summis serierum reciprocarum;* man ersieht hieraus, wie irreführend es ist, wenn J. G. HAGEN in dem *Index Operum* LEONHARD EULERI (Berlin 1896), S. 11 diese Abhandlung unter der Jahreszahl 1734/35 anführt. Übrigens findet sich, was GAUSS entgangen zu sein scheint, in dem Journal doch ein Hinweis auf EULERS Autorschaft, denn in dem am Schlusse des Bandes befindlichen alphabetischen Verzeichnis der im Text vorkommenden Personennamen wird EULER mit der Seitenzahl 115 angeführt.

er müßte Zeile um Zeile gleichsam ein fac simile davon nehmen. Der Aufsatz wimmelt nämlich von barbarischen Druckfehlern, die allerdings ein Sachverständiger gleich als solche erkennt"[1]).

Die Irrtümer in der Angabe von NICOLAUS FUSS suchte GAUSS dadurch zu erklären, daß jener „nur aus dem Gedächtnisse oder noch wahrscheinlicher nach der Gedächtnisangabe eines Dritten citiert habe". Daß es sich so verhält, ist um so wahrscheinlicher als, nach C. G. J. JACOBI, EULER am 22. Juni 1747 der Berliner Akademie eine Abhandlung des Titels: *Découverte d'une loi extraordinaire des nombres* vorgelegt hat, die jedoch in deren Memoiren nicht aufgenommen worden ist; aus einer im Archiv der Berliner Akademie vorhandenen Abschrift hat sie FUSS in den *Commentationes arithmeticae*, T. II, S. 639, veröffentlicht[2]).

2.

Es kann kaum Wunder nehmen, daß die Abhandlung EULERS, die anonym in einer wenig verbreiteten holländischen Literaturzeitung erschienen war, unter den Mathematikern keine Beachtung gefunden hat. „PFAFF, hätte er sie gekannt," bemerkt GAUSS an FUSS, „würde er sie gewiß in seiner Schrift von 1788 nicht unerwähnt gelassen haben"; dieser *Versuch einer neuen Summationsmethode nebst anderen analytischen Bemerkungen* (Berlin 1788) bezieht sich auf die Summation der Reihen

$$S_{2r} = 1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{4^{2r}} + \frac{1}{5^{2r}} + \dots$$

und enthält auch einige geschichtliche Notizen. Aber auch den späteren Autoren, die sich mit den Summen der reziproken Potenzen der natürlichen Zahlen beschäftigt haben, scheint EULERS Abhandlung entgangen zu sein. Sie fehlt in R. REIFFS *Geschichte der unendlichen Reihen* (Tübingen 1889) und wird auch nicht in M. CANTORS *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 3^2, Leipzig 1901, Kapitel 110—113, S. 666—773

1) In der Vorrede zu den *Commentationes arithmeticae*, T. I, S. XXIV hat sich P. H. v. FUSS über die Entdeckung der Abhandlung im Journal durch GAUSS so geäußert: „Commentatio haec nomine auctoris caret. Cl. GAUSSIUS, qui humanissime in se susceperat in bibliotheca Göttingensi inquirere, ubinam librorum reperiretur alia quaedam EULERI Commentatio (cf. supra p. XVIII) ex occasione in hanc ipsam incidit. Sed cum erroribus scateat typographicis, vir summus non recusavit eam sua manu describere et ad nos in usum editionis transmittere".

2) In betreff der Herausgabe der Werke EULERS hat zwischen P. H. v. FUSS und C. G. J. JACOBI ein umfangreicher Briefwechsel stattgefunden, der sehr wertvolle Vorarbeiten für dieses schwierige Unternehmen enthält; so sandte zum Beispiel JACOBI an FUSS Auszüge aus den Protokollen der Berliner Akademie, die ergeben, wann EULER die einzelnen Abhandlungen vorgelegt hat. In Gemeinschaft mit Herrn W. AHRENS werde ich diesen Briefwechsel demnächst in der Bibliotheca Mathematica veröffentlichen.

angeführt. Auch G. ENESTRÖM hat sie in seiner *Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés* (Biblioth. Mathem. 4_2, 1890, S. 22) und in dem *Briefwechsel zwischen* LEONHARD EULER *und* JOHANN I. BERNOULLI (Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 249) nicht herangezogen[1]).

Als ein kleiner Beitrag zu der Feier der zweihundertsten Wiederkehr des Geburtstages von LEONHARD EULER möge es aufgefaßt werden, wenn im folgenden seine vergessene *Démonstration* wieder abgedruckt wird. Vorher aber möge dargelegt werden, welche Stellung diese Abhandlung in der Geschichte der unendlichen Reihen einnimmt. Es erscheint das um so mehr angebracht, als die Geschichte der Summen S_{2r} bisher noch nicht in zusammenhängender Weise behandelt worden ist und die zerstreuten Notizen, die man darüber in den historischen Werken findet, manche Irrtümer und Lücken aufweisen. Dabei soll nur die Zeit bis 1755 berücksichtigt werden; in der Tat ist seitdem nichts Wesentliches hinzugekommen.

3.

In dem ersten Teile seiner *Propositiones arithmeticae de seriebus infinitis eorumque summa finita* (Basel 1689)[2]) beschäftigt sich JAKOB BERNOULLI unter anderem auch mit der Summation von unendlichen Reihen, deren Glieder Brüche mit dem Zähler Eins sind, während die Nenner aus figurierten Zahlen oder aus den Differenzen dieser Zahlen und einer bestimmten von ihnen bestehen. Er erkennt, daß die Summe der reziproken Werte der natürlichen Zahlen selbst unendlich ist, dagegen gelingt es ihm, die endlichen Summen der unendlichen Reihen zu bestimmen, bei denen die Nenner Dreieckszahlen, die Differenzen der Dreieckszahlen und einer bestimmten Dreieckszahl, die Differenzen der Quadratzahlen und einer bestimmten Quadratzahl sind. „Sind die Nenner jedoch reine Quadrate, wie bei der Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ etc., so ist merkwürdigerweise die Erforschung der Summe schwieriger als man erwarten sollte; daß die Summe endlich ist, erschließen wir aus der anderen

1) Wie ENESTRÖM erwähnt hat (Biblioth. Mathem. $\mathbf{3}_2$, 1889, S. 4; $\mathbf{4}_2$, 1890, S. 24) gibt es eine historische Monographie von J. MELDERCREUTZ, *De summatione seriei reciprocae e quadratis numerorum naturalium* (Holmiae 1755), die unter dem Präsidium des Verfassers in Upsala von C. A. BERGSTRÖM verteidigt wurde. ENESTRÖM hatte die Freundlichkeit, mir diese Dissertation zugänglich zu machen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle bestens danken möchte.

2) Wiederabgedruckt *Opera*, Genf 1744, T. I, S. 373—402. — Nach der oben zitierten Abhandlung von J. MELDERCREUTZ (S. 6) hat schon J. WALLIS in seiner *Arithmetica infinitorum* (Oxford 1655) die unendliche Reihe der reziproken Quadratzahlen erwähnt.

$\left[\text{Summe der Dreieckszahlen } 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots\right]$, da sie augenscheinlich kleiner als diese ist. Sollte jemand das, was unseren Anstrengungen bis jetzt entgangen ist, finden und uns mitteilen, so werden wir ihm sehr dankbar sein[1]).

Diese Aufforderung hatte insofern Erfolg, als JAKOB BERNOULLIS jüngerer Bruder JOHANN BERNOULLI sich mit der Frage beschäftigte. „Je vois déjà la route de trouver la somme $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. ce que nous ne pouvions pas autrefois", schreibt er, wieder einmal etwas voreilig, am 22. Mai 1691 an seinen Bruder[2]); ohne Zweifel hat er bald entdeckt, daß er sich geirrt hatte.

Später hat FONTENELLE in seiner *Géométrie de l'infini* (Paris 1727) einige Sätze über die Summe der reziproken Quadratzahlen aufgestellt, die jedoch, wie MACLAURIN in der „Introduction" zu seinem *Treatise of fluxions* (Edinburg 1742) bemerkt hat, unrichtig sind. Ferner fand STIRLING in der *Methodus differentialis* (London 1730), S. 28 mittels seiner Summationsmethode den Näherungswert

$$1{,}644\,934\,066,$$

der von dem wahren Werte $1{,}644\,934\,064\,8\ldots$ erst in der neunten Dezimalstelle abweicht[3]). Auch in dem Briefwechsel zwischen DANIEL

1) Diese entscheidende Stelle ist M. CANTOR entgangen, der vielmehr sagt, in der zweiten Abhandlung JAKOB BERNOULLIS über Reihen vom Jahre 1692 (*Opera* T. I, S. 517—542) sei auch „erstmalig die Reihe der reziproken Quadratzahlen allerdings erfolglos in Angriff genommen" (a. a. O. 3^2, S. 96). Von einer solchen erfolglosen Bemühung habe ich in der zweiten Abhandlung nichts finden können; die Summe S_2 tritt darin allerdings auf, aber nur als Hilfsgröße bei der Umformung anderer unendlicher Reihen, ohne daß sie selbst untersucht würde. Möglicherweise bezieht sich die Angabe CANTORS auf die dritte Abhandlung vom Jahre 1698, wo (siehe *Opera* T. II, S. 759) JAKOB BERNOULLI die Summierung der Reihe auf die Quadratur einer gewissen Kurve reduziert hat. Nebenbei sei noch bemerkt, daß es S. 658 bei der Erwähnung von S_2 statt JOHANN BERNOULLI heißen muß JAKOB BERNOULLI.

2) Mitteilung von ENESTRÖM aus einem noch nicht veröffentlichten Briefe JOHANN BERNOULLIS an JAKOB BERNOULLI, Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 249.

3) Diese Angaben sind der Dissertation von MELDERCREUTZ entnommen. Dieser weist auch darauf hin, daß EULER in den Petersburger Commentarii 6, 1732/33, gedruckt 1738 (gemeint ist die Abhandlung *Methodus generalis summandi progressiones*, S. 68—97, § 12) die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $x^n : (an + b)^m$ mittels eines bestimmten Integrals summiert hat, die für $a = 1$, $b = 0$, $m = 2$, $x = 1$ in die Summe der reziproken Quadratzahlen übergehen würde; man findet so die Formel

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \int_0^1 \frac{ln\,(1 - x)}{-x}\,dx;$$

freilich setzt EULER selbst nur $m = 2$, $x = 1$, aber beschäftigt sich nicht mit dem

BERNOULLI und GOLDBACH tritt sie auf (Briefe vom 29. August 1728 und 31. Januar 1729); im besonderen zeigt GOLDBACH wie man durch einfache Überlegungen beweisen könne, daß die Summe zwischen 1,644 und 1,645 liegt[1]).

Da die eben erwähnten Briefe aus der Zeit stammen, in der DANIEL BERNOULLI mit EULER zusammen in Petersburg lebte (1727—1733), so ist es wahrscheinlich, daß das reizvolle, aber schwierige Problem der Summation der Reihe der reziproken Quadratzahlen auch zwischen diesen beiden Mathematikern besprochen worden ist, und diese Vermutung gewinnt dadurch fast den Grad einer Gewißheit, daß EULER von seiner Entdeckung des genauen Wertes der Summe zuerst DANIEL BERNOULLI Kenntnis gegeben hat.

Leider ist der Brief, in dem EULER die Formel

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

angab, bis jetzt nicht wieder aufgefunden worden. Wir wissen davon nur aus der Antwort DANIEL BERNOULLIS vom 12. September 1736. Hier heißt es: „Das theorema summationis seriei

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \text{ etc.} = \frac{pp}{6} \quad \text{und} \quad 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} \text{ etc.} = \frac{p^4}{90}$$

ist sehr merkwürdig. Sie werden ohne Zweifel a posteriori darauf gekommen sein. Ich möchte die Solution gern von Ihnen sehen“[2]).

Die Formel $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$ hat JOHANN BERNOULLI durch seinen Sohn DANIEL erfahren[3]) und sofort versucht, seinerseits einen Beweis dafür zu finden. Es ist erstaunlich, daß er genau die kühne Methode wiedergefunden hat, deren sich EULER bedient hatte. Sie besteht darin, daß der Satz: „Bei einer algebraischen Gleichung, deren absolutes Glied den Wert Eins hat, ist der Koeffizient des Gliedes mit der ersten Potenz der Unbekannten gleich der negativen Summe der reziproken Werte der Gleichungswurzeln“ auf die Gleichung „unendlich hohen Grades“:

$$1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots = 0$$

Falle $a = 1$, $b = 0$ und versucht auch nicht den Wert des Integrales zu ermitteln. Vergl. auch EULERS nachgelassene Abhandlung: De summatione serierum in hac forma contentarum: $\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \cdots$; Mém. de l'acad. d. sc. de St.-Pétersbourg **3**, 1809/10 (1811), S. 26, sowie den Brief an NICOLAUS BERNOULLI vom 1. September 1742, L. EULER: *Opera postuma*, Petersburg 1862, I, S. 521.

1) *Corresp.* II, S. 263, 281.

2) *Corresp.* II, S. 435. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906, S. 127 setzt den Brief EULERS vermutungsweise in den August 1736.

3) Vgl. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 253.

angewandt wird, die durch die Substitution $x^2 = z$ aus der Gleichung $\frac{\sin x}{x} = 0$ hervorgegangen ist; es ist klar, daß diese Gleichung die Wurzeln $z = n^2 \pi^2$ hat, wo n irgend eine positive, von Null verschiedene ganze Zahl bedeutet.

Ein Vorzug der Methode ist, daß sie sofort noch weitere Summationsformeln liefert, die sich aus dem bekannten Zusammenhange zwischen den Koeffizienten der Gleichung und den Summen der Produkte der reziproken Wurzeln zu je zwei, drei, vier, ... ergeben. Aus diesen Formeln findet man, wie EULER und BERNOULLI sofort erkannten, vermöge der GIRARD-NEWTONschen Relationen zwischen den Summen der Potenzen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung nach und nach die Werte der Summen $S_4, S_6, S_8, \ldots$.[1]) EULER hat übrigens statt der Gleichung $\sin x = 0$ auch allgemeiner die Gleichung $\sin x = a$ betrachtet, wo a eine Konstante bedeutet, der er verschiedene geeignete Werte gibt, zum Beispiel den Wert Eins; er gelangt auf diesem Wege nicht nur zu den Summen S_{2r}, sondern auch zu weiteren Summen, auf die jedoch hier nicht eingegangen werden kann.

4.

In gewisser Beziehung war JOHANN BERNOULLI über EULER hinausgegangen, er erhob nämlich (Brief vom 2. April 1737 an EULER) gegen die soeben auseinandergesetzte Methode den Einwand, sie beruhe auf der unbewiesenen Voraussetzung, daß die Gleichung $\sin x = 0$ keine imaginären Wurzeln besitze und überhaupt keine anderen, als die, die den unzählig vielen, zu dem Werte Null des Sinus gehörigen Bogen entsprechen. Dafür, daß es sich so verhalte, habe er eine Art von Beweis, der ihm die Sache jedoch nur wahrscheinlich mache [2]).

In seiner Antwort vom 27. August 1737 erkennt EULER an, daß dieses Bedenken von großem Gewichte sei; freilich scheine es nicht leicht zu sein, zu beweisen, daß die Gleichung $\sin x = 0$ keine imaginären Wurzeln habe. Jedoch könne als Bestätigung seiner Methode der Umstand dienen, daß die dadurch gefundenen Werte der Summen S_{2r} mit den durch numerische Summation gefundenen gut übereinstimmten [3]).

---

1) Obwohl EULERS Abhandlung *De summis serierum reciprocarum* bereits 1740 erschienen war, hat JOHANN BERNOULLI doch 1742 seine Herleitung der Summen S_2, S_4, S_6 in den vierten Band der *Opera omnia* aufgenommen, der die *Anecdota* enthält (S. 20—25).

2) Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 253-255.

3) In dem vorher angeführten Briefe an NICOLAUS BERNOULLI vom 1. September 1742 bemerkt EULER, er habe seine Methode erst veröffentlicht, nachdem er sich von dieser Übereinstimmung überzeugt hatte. Die Zahlenwerte von S_2 bis S_{16}, auf 16 Dezimalstellen berechnet, hat er in den *Institutiones calculi differentialis*, P. II, Petersburg 1755, S. 456 mitgeteilt.

Außerdem habe er aber den Wert $\frac{\pi^2}{6}$ für S_2 auf einem ganz anderen Wege wiedererhalten, und nun deutet EULER gerade die Methode an, die in dem Journal littéraire durchgeführt ist. Er geht aus von der Reihe für arc sin x:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

und bildet mit ihrer Hilfe die Gleichung

$$\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 = \int_0^x \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdot\cdot\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Auf der rechten Seite wird gliedweise integriert und dann $x = 1$ gesetzt. So kommt:

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\int_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\int_0^1 \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdot\cdot$$

Es ist aber

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

wie sich durch partielle Integration ergibt[1]). Mithin erhält man

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots,$$

woraus der Wert von S_2 leicht hergeleitet werden kann. Er zweifele nicht daran, meinte EULER am Schluß des Briefes, daß auch die Summen $S_4, S_6, \ldots.$ durch eine ähnliche Analyse gefunden werden könnten[2]).

JOHANN BERNOULLI (Brief vom 5. Nov. 1737) erklärt EULERS Darlegungen für sehr schön und seines Scharfsinns würdig; die neue Herleitung von S_2 sei schlüssig und der alten bei weitem vorzuziehen. Er habe nach ihrem Muster die Reihenformel

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{8} + \cdots$$

---

1) Auf diese Rekursionsformel ist EULER später zurückgekommen und hat untersucht, wie man die Funktion v von x wählen müsse, damit eine Relation der Form

$$\int_0^1 x^n\,dv = \frac{\beta n + b}{\alpha n + a}\int_0^1 x^{n-1}\,dv + \frac{\gamma n + c}{\alpha n + a}\int_0^1 x^{n-2}\,dv$$

besteht (*Methodus inveniendi formulas integrales quae certis casibus datam inter se teneant rationem, Opuscula analytica,* Petersburg 1785, t. II, S. 178—216; wiederabgedruckt *Institutiones calculi integralis,* T. IV, S. 378—415).

2) Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 257—259.

gefunden [1]); wie JOHANN BERNOULLIS *Opera omnia*, T. IV (Basel 1742), S. 24—25 zeigen, hatte er diese Formel erhalten, indem er statt des arc sin x den arc tg x nahm. Sie ergibt sich aber auch, wie EULER in seiner Antwort vom 10. Dezember 1737 sagt, wenn man in der Entwickelung der Funktion (arc sin x)^2 nach Potenzen von x, nämlich

$$(\text{arc sin } x)^2 = \frac{1}{1}\frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{4} + \dots$$

$x = 1$ setzt [2]).

Merkwürdigerweise findet sich diese Potenzreihe für (arc sin x)^2 bereits bei dem japanischen Mathematiker SEKI (1642—1708) [3]), und es war daher von Wichtigkeit, festzustellen, wann sie in dem Abendlande zuerst auftritt. Wir wissen, daß sie EULER schon im Jahre 1737 bekannt gewesen ist; sein Brief an JOHANN BERNOULLI ist jedoch erst im Jahre 1904 von G. ENESTRÖM veröffentlicht worden. Fragt man aber, wann die Reihe zuerst im Drucke vorkommt, so wurden bis jetzt die *Mélanges d'analyse algébrique* von J. DE STAINVILLE angeführt, die 1815 zu Paris erschienen sind [4]). Um so überraschender ist es, daß EULER bereits 1743 in dem Journal litteraire die Herleitung der Potenzreihe für (arc sin x)^2 ausführlich angegeben hat. Diese Reihe wird nämlich in recht eleganter Weise mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten aus der linearen Differentialgleichung

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 1$$

gewonnen, der die Funktion (arc sin x)^2 bei der Anfangsbedingung $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ genügt.

In dem Journal verwendet EULER die Reihe für (arc sin x)^2 dazu, um einen zweiten Beweis für die Formel $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$ zu geben, von dem sich in den Briefen an JOHANN BERNOULLI nichts findet. Es ist nämlich

$$\frac{1}{6}(\text{arc sin } x)^3 = \int\limits_0^x \left(\frac{1}{1}\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{8} + \dots\right)\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Auf der rechten Seite wird wieder gliedweise integriert, nach der In-

1) Biblioth. Mathem. 5_3, S. 266—267.

2) Ebenda, S. 270.

3) Vgl. P. HARZER, *Die exakten Wissenschaften im alten Japan;* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **14**, 1905, S. 318.

4) Dieses seltene Werk scheint in Deutschland nur auf der Universitätsbibliothek zu *Breslau* vorhanden zu sein. Die Potenzreihe für (arc sin x)^2 ist wohl erst dadurch allgemein bekannt geworden, daß sie CAUCHY, unter Berufung auf STAINVILLE, in seine *Analyse algébrique,* Paris 1822, S. 550 aufgenommen hat; vgl. auch das Zitat bei J. G. HAGEN, *Synopsis der höheren Mathematik,* Bd. I (Berlin 1891), S. 113.

tegration $x = 1$ gesetzt und auf die einzelnen Integrale die Reduktionsformel angewandt. Auf diese Weise ergibt sich

$$\frac{\pi^3}{48} = \frac{1}{2^2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4^2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{6^2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8^2}\frac{\pi}{2} + \cdots,$$

woraus durch Division mit $\frac{\pi}{8}$ die Formel für S_2 hervorgeht.

5.

Es liegt nahe zu vermuten, daß Euler 1737 gehofft hatte, mittels der Reihenentwickelungen der Potenzen des arc sin x die Formeln für die Summen S_{2r} zu erhalten. Jedenfalls war er jedoch, als er die Abhandlung in dem Journal niederschrieb, zu der Überzeugung gelangt, daß eine solche Hoffnung trügerisch sei.

Wann aber hat Euler die *Démonstration* verfaßt? Gewisse Anhaltspunkte für die Bestimmung der Zeit werden sich ergeben, wenn wir den Gang seiner weiteren Untersuchungen über die Summen S_{2r} betrachten.

Zunächst ist eine erst im Jahre 1750 veröffentlichte Abhandlung *De seriebus quibusdam considerationes* zu nennen, die sich in dem T. XII der Petersburger Kommentarien für das Jahr 1740, S. 53, befindet, die aber, wie sich herausstellen wird, spätestens 1741 entstanden sein muß. Die Girard-Newtonschen Relationen hatten es zwar ermöglicht, Schritt für Schritt die Werte der Summen $S_2, S_4, S_6, S_8, \ldots$ zu berechnen, allein die Berechnung wurde mit wachsendem Exponenten $2r$ immer mühsamer, und man mußte wünschen, einen bequemeren Weg zu finden. Dies gelang Euler durch folgende Überlegung. Bei der Gleichung

$$1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \delta x^4 - \ldots = 0$$

seien die Summen der reziproken Potenzen der Wurzeln der Reihe nach $A, B, C, D, \ldots$ Dann besteht vermöge der Girard-Newtonschen Relationen die Identitität:

$$\frac{\alpha - 2\beta x + 3\gamma x^2 - 4\delta x^3 + \cdots}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma y^3 + \delta x^4 - \cdots} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots;$$

dabei ist der Zähler des Bruches gleich der negativen Ableitung seines Nenners. Kann man also den Bruch nach Potenzen von x entwickeln, so hat man in den Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x die Summen der reziproken Wurzelpotenzen. Ist nun im besonderen die Gleichung

$$1 - \sin x = 0$$

vorgelegt, die die Doppelwurzeln $x = \frac{\pi}{2}, -3\frac{\pi}{2}, +5\frac{\pi}{2}, -7\frac{\pi}{2}, \ldots$ besitzt, so hat man die Funktion

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

nach Potenzen von x zu entwickeln. Diese genügt aber der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1 + y^2),$$

mit der Anfangsbedingung $x = 0, y = 1$, zu deren Integration nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$y = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots.$$

angesetzt wird.

Die neue Methode benutzt EULER, um sogleich die Werte von S_2 bis S_{24} zu berechnen, und zwar erscheinen diese Werte in der Gestalt

$$S_{2r} = \frac{2^{2r-1}}{(2r+1)!} A_{2r} \pi^{2r},$$

wo die A_{2r} Brüche bedeuten, die nach keinem unmittelbar ersichtlichen Gesetze fortschreiten; es ist im besonderen

$$A_2 = \frac{1}{2},\ A_4 = \frac{1}{6},\ A_6 = \frac{1}{6},\ A_8 = \frac{3}{10},\ A_{10} = \frac{5}{6},\ A_{12} = \frac{691}{210}, \dots.$$

Die Koeffizienten A_{2r} stehen aber, wie EULER erkennt, im engen Zusammenhange mit den Koeffizienten, die bei seiner klassischen Summenformel aufgetreten waren; diese geht nämlich bei Benutzung der Zeichen A_{2r} über in die Gleichung:

$$\sum_0^n f(x) = \int_0^n f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(n) - f(0)] + \frac{1}{3!} A_2 [f'(n) - f'(0)]$$
$$- \frac{1}{5!} A_4 [f'''(n) - f'''(0)] + \frac{1}{7!} A_6 [f^{\text{v}}(n) - f^{\text{v}}(0)] - \dots$$ [1])

6

Die Abhandlung, über die im Vorhergehenden berichtet wurde, läßt sich als eine Ausgestaltung der Methode vom Jahre 1736 bezeichnen. Die Methode selbst erfuhr im Jahre 1741 heftige Angriffe. DANIEL BERNOULLI machte in einem Briefe an EULER vom 20. September 1741 dagegen geltend, daß „eine aequatio per series nicht die proprietates habe, als die aequationes algebraicae, in quibus coefficiens secundi termini est summa radicum; solches könnte ich mit gar vielen Argumenten beweisen. Wenn also Ew. ehemals gefunden, daß $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.} = \frac{1}{6} cc$, posita $c =$ circumferentiae circuli, cujus diameter $= 1$, so halte ich dieses theorema nur

1) Wenn EULER am Schlusse seiner *Démonstration* sagt, er habe bereits zwei verschiedene Methoden zur Berechnung der Koeffizienten A_{2r} gegeben, so meint er damit wohl erstens die Methode der Reihenentwickelung von $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ und zweitens die Definition der Koeffizienten A_{2r} durch die Summenformel.

accidental, . . . allein applicieren Sie eben dieses raisonnement auf eine Ellipse cujus axis major $= m$, axis minor $= n$, circumferentia $= S$, so werden Sie finden, quod sit

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.} = \frac{mmSS}{6n^4},$$

quod foret absurdum. Diese letztere Observation hat auch Herr Prof. CRAMER aus Genf überschrieben"[1]). EULERS Antwort ist leider verloren, daß er jedoch die Einwendungen DANIEL BERNOULLIS als stichhaltig anerkannt hat, ergibt sich daraus, daß er am 16. Januar 1742 einem Neffen JOHANN BERNOULLIS, NICOLAUS BERNOULLI in Basel, eine strengere Begründung seiner Methode vom Jahre 1736 und eine ganz neue, auf der Anwendung bestimmter Integrale beruhende Herleitung der Summen S_{2r} mitgeteilt hat[2]). Daß EULER sich gerade an NICOLAUS BERNOULLI wandte, hängt wohl damit zusammen, daß dieser sich mit der Summation der Reihe der reziproken Quadrate beschäftigt hatte[3]).

Jene strengere Begründung besteht in dem Nachweise, daß die Gleichung $\sin x = 0$ nur die Wurzeln $x = n\pi$ hat, wo n irgend eine positive oder negative ganze Zahl mit Einschluß der Null bedeutet. Durch Verbindung der Gleichungen

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

und

$$e^z = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

gewinnt EULER die Formel

$$\sin x = \frac{1}{2i}\lim_{n=\infty}\left\{\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{ix}{n}\right)^n\right\}$$

---

1) *Corresp.* II, S. 477.

2) *Opera postuma* I, S. 519.

3) *Inquisitio in summam seriei* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$ Comment. Petrop. **10**, ad annum 1738 [1747], S. 19—21. N. BERNOULLI zeigt hier, daß die Funktion

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots,$$

wenn die Koeffizienten A_n der Rekursionsformel genügen

$$A_n + (an[n+1] + bn + c) = A_n + \frac{1}{1}\left(e[n+1]n + f[n+1] + g\right)$$

einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Kann man also ein Integral dieser Gleichung finden, bei dem die Anfangsbedingung $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = A_1$ erfüllt ist, so liefern die Werte des Integrals für $x = 1$ die Summe der unendlichen Reihe $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$. Die Schwierigkeit, diese Methode auf S_2 anzuwenden, besteht darin, daß N. BERNOULLI die zugehörige Differentialgleichung nicht integrieren konnte und daher aus S_2 durch recht umständliche Kunstgriffe eine andere Reihe herleitet, bei der die Integration durch Kreisfunktionen gelingt.

und zerlegt die Differenz der n-ten Potenzen nach Absonderung des Faktors $\frac{2ix}{n}$ in trinomische Faktoren. Der Übergang zur Grenze führt alsdann zu der berühmten Produktformel:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right),$$

die demnach dem Probleme, die Summe der reziproken Quadrate zu finden, ihre Entstehung verdankt[1]). Wenn man jetzt die Potenzreihe, die aus der Produktformel durch Ausmultiplizieren hervorgeht, mit der NEWTONschen Potenzreihe für $\sin x$ vergleicht, erhält man Relationen, aus denen sich die Summen S_{2r} bestimmen lassen.

NICOLAUS BERNOULLI meinte (Brief vom 13. Juli 1742), der letzte Schluß sei nur dann berechtigt, wenn man beweise, daß die NEWTONsche Reihe für jeden Wert von x konvergiere; denn der von CRAMER mitgeteilte Trugschluß erkläre sich daraus, daß die dabei benutzte Reihe bei wachsenden Werten des Ellipsenbogens divergent werde[2]). EULER, dem Betrachtungen über Divergenz und Konvergenz immer unbehaglich waren, hat, wie sein Brief an NICOLAUS BERNOULLI vom 10. November 1742 zeigt, diese für die damalige Zeit recht scharfsinnigen Betrachtungen nicht zu würdigen gewußt; das CRAMERsche Paradoxon, meint er, finde seine Auflösung darin, daß die betreffende Gleichung auch imaginäre Wurzeln besitze.

Die neue Herleitung gründet sich auf die Integralformel:

$$\text{(I)} \qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1 - x^q} = \frac{\pi}{q \operatorname{tg} \frac{p\pi}{q}},$$

in der p und q positive ganze Zahlen, p kleiner als q, bedeuten; sie ergeben sich durch Partialbruchzerlegung und Summation der durch die Integration entstehenden endlichen Reihen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin}{\cos} (a\nu + b).$$

Wenn man aber die Integranden nach steigenden Potenzen von x entwickelt und darauf gliedweise integriert, so gelangt man zu der unendlichen Summe

$$\frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p + nq} + \frac{1}{p - nq}\right)$$

1) Für die Gedanken, die EULER bei der Produktformel leiteten, vergleiche man die ausführlichen Darlegungen in dem langen Briefe an NICOLAUS BERNOULLI, *Opera postuma* I, S. 521—527.

2) *Correspond.* II, S. 683—684. — 3) *Opera postuma* I, S. 528.

und hat also für

$$\frac{p}{q} = s$$

die Identität

$$(T) \qquad \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi s} = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+n} + \frac{1}{s-n}\right).$$

Hierin bezeichnet s zunächst einen positiven echten Bruch, man darf aber, wie EULER sich ausdrückt, nach dem Gesetze der Stetigkeit s auch als eine stetig veränderliche Größe ansehen, nach der differentiiert werden kann. Wiederholte Differentation liefert die Identitäten

$$\frac{1}{(2r)!} \frac{d^{2r}}{ds^{2r}} \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi s} = \frac{1}{s^{2r}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(s+n)^{2r}} + \frac{1}{(s-n)^{2r}}\right).$$

Wird hierin $s = \frac{1}{2}$ gesetzt, so gelangt man zu den Summen S_{2r}.

Eine Reihe ähnlicher Betrachtungen führt von der Integralformel

$$(\mathrm{II}) \qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1+x^q}\, dx = \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$$

zu der Identität:

$$(S) \qquad \frac{\pi}{\sin \pi s} = \frac{1}{s} + \sum_{n-1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{s+n} + \frac{1}{s+n}\right),$$

aus der man durch wiederholte Differentiation weitere Identitäten erhält. Auf diese Art findet EULER die Summen der unendlichen Reihen

$$1 - \frac{1}{3^{2r+1}} + \frac{1}{5^{2r+1}} - \frac{1}{7^{2r+1}} + \frac{1}{9^{2r+1}} - \cdots;$$

dagegen ist es weder ihm noch einem späteren Mathematiker gelungen, die Summen

$$S_{2r+1} = 1 + \frac{1}{2^{2r+1}} + \frac{1}{3^{2r+1}} + \frac{1}{4^{2r+1}} + \frac{1}{5^{2r+1}} + \cdots$$

in geschlossener Form darzustellen. Daß sie zu den entsprechenden Potenzen von π jedenfalls nicht in einfachen rationalen Verhältnissen stehen, hat schon EULER bemerkt; ob der von ihm vermutete Zusammenhang mit dem natürlichen Logarithmus von 2[1]) wirklich besteht, verdiente geprüft zu werden.

Auch zu der neuen Herleitung hat NICOLAUS BERNOULLI eine feine Bemerkung gemacht; es ist sehr zu bedauern, daß dieser hochbegabte Mann wegen seiner vielen Amtsgeschäfte als Professor der Jurisprudenz keine Zeit gefunden hat, sich mehr mit Mathematik zu beschäftigen. Zur Herleitung der Formeln, die hier mit (T) und (S) bezeichnet sind, bedürfe es, schreibt er, keines so großen Apparates, denn die Formel (T) folge

1) *Opera postuma* I, S. 521.

sofort aus der Produktdarstellung für $\sin \pi s$ durch logarithmische Differentiation und auf ähnliche Art könne man auch die Formel (S) finden[1]). Als EULER hierüber Aufklärung wünscht, antwortet er am 24. Oktober 1742, man brauche nur bei dem Quotienten $\frac{\sin \pi s}{\cos \pi s}$ in Zähler und Nenner die Produktdarstellungen einzusetzen und dann wieder logarithmisch zu differentiieren[2]). Wo sich diese eleganten Beweise für die Formeln (T) und (S) zuerst gedruckt finden, habe ich nicht ermitteln können. EULER scheint sie nicht benutzt zu haben; in der zusammenfassenden Darstellung seiner Untersuchungen über die Kreisfunktionen, *Introductio* (Lausanne 1748), T. I, Cap. 10, gibt er zwar eine elementare Herleitung dieser Formeln (§ 178), sie geschieht aber durch Umformungen im Sinne der sogenannten algebraischen Analysis.

7.

Bei seiner Einführung in die Berliner Akademie am 6. September 1742 hat EULER nicht weniger als sieben Abhandlungen zur Aufnahme in deren Schriften vorgelegt, von denen fünf sogleich in den Miscellanea Berolinensia gedruckt wurden, deren siebenten Band vom Jahre 1743 sie zieren. Den Gegenstand der dritten und vierten Abhandlung bilden die Untersuchungen, über die soeben berichtet wurde. In der Abhandlung *De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur* (S. 129—171) findet sich die Herleitung der Integralformeln (I) und (II), und unmittelbar darauf folgt die Abhandlung *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera* (S. 172—192)[3]). Wohl nicht ohne Absicht hatte sich EULER mit dieser Abhandlung in Berlin eingeführt, die einen Höhepunkt in seinen mathematischen Leistungen bedeutet. Wie fruchtbar der Gedanke war, die Kreisfunktionen als Produkte darzustellen, bei denen die Nullstellen in Evidenz gesetzt werden, hat sich später bei den elliptischen Funktionen gezeigt, und die Frage nach einer solchen Produktdarstellung der ganzen transzendenten Funktionen hat die Mathematiker bis zum Ende des 19. Jahrhunderts beschäftigt.

Wenden wir uns jetzt zurück zu EULERS Abhandlung in dem Journal

1) *Correspond.* II, S. 688—689.

2) Ebenda, S. 694.

3) EULERS *Opuscula analytica* t. II (Petersburg 1785), enthalten auf S. 257—274 eine Abhandlung *De seriebus potestatum reciprocis methodo nova ac facillima summandis.* Merkwürdigerweise ist diese neue Methode mit der alten vom Jahre 1742 durchaus identisch, so daß man annehmen muß, EULER habe bei der Abfassung der Abhandlung, die wahrscheinlich aus den letzten Jahren seines Lebens stammt, sich seiner früheren Untersuchungen nicht mehr erinnert.

littéraire vom Jahre 1743, so lassen sich für deren Abfassungszeit ziemlich enge Grenzen angeben. Da in ihr der T. VII der Petersburger Commentarii erwähnt wird, kann sie nicht vor 1740 geschrieben sein, und auf der anderen Seite zeigt der Briefwechsel zwischen EULER und NICOLAUS BERNOULLI, daß sie vor 1742 entstanden ist. Man wird demnach mit der Angabe 1740 bis 1741 das Richtige treffen. Die Bedeutung der *Démonstration* für die Geschichte der Summen S_{2r} läßt sich jetzt so kennzeichnen:

1) in ihr wurde die 1737 brieflich an JOHANN BERNOULLI mitgeteilte zweite Herleitung des Wertes der Summe der reziproken Quadrate zum ersten Male durch den Druck veröffentlicht. Diese Herleitung ist nicht nur, wie GAUSS sich ausdrückt, „recht artig", sondern genügt auch den Ansprüchen der modernen Strenge;

2) außerdem enthält die Abhandlung eine dritte bemerkenswerte Herleitung derselben Summe, die weder in Briefen an JOHANN BERNOULLI vorkommt noch sonst von EULER erwähnt worden ist;

3) bei dieser dritten Herleitung wird die Entwickelung der Funktion $(\arcsin x)^2$ in eine Potenzreihe, die EULER 1737 ohne Beweis an JOHANN BERNOULLI brieflich mitgeteilt hatte, vollständig durchgeführt. Sie ist darin im Abendlande zum ersten Male durch den Druck veröffentlicht, während bisher nur bekannt war, daß sie 1815 bei STAINVILLE auftritt.

Wenn zu Anfang bemerkt wurde, daß EULERS *Démonstration* unter den Mathematikern keine Beachtung gefunden habe, so gibt es doch vielleicht eine Ausnahme. In dem Werke: *The doctrine and application of fluxions*, das THOMAS SIMPSON im Jahre 1750 zu London erscheinen ließ, findet sich nämlich (S. 395) genau die Herleitung für die Summe der reziproken Quadratzahlen, die EULER dort angegeben hatte[1]), allerdings als Spezialfall einer Reihe für $\int \boldsymbol{H}(a - bz^n)^m \times z^{qn-1}\,dz$, wo $\boldsymbol{H}$ selbst ein Integral von der Form $\int (k + lz)^r \times z^{vn-1}\,dz$ ist. Ob es sich dabei um ein zufälliges Zusammentreffen handelt oder ob SIMPSON EULERS Abhandlung gelesen hat, das wird sich wohl jetzt nicht mehr aufklären lassen.

8.

Es sei gestattet, den Bericht noch ein wenig weiter zu führen, da sich so ein gewisser Abschluß erreichen läßt.

Die zusammenfassende Darstellung der Untersuchungen über die

1) Auf diesen merkwürdigen Umstand bin ich durch die Dissertation von MELDERCREUTZ aufmerksam geworden (S. 34—35), dem freilich die EULERsche *Démonstration* entgangen ist.

Kreisfunktionen in der *Introductio* (1748), auf die schon hingewiesen wurde, enthält in den Ergebnissen kaum etwas Neues. Nur eine Äußerung EULERS muß angeführt werden. Nachdem EULER aus der Produktdarstellung des Sinus eine Methode zur Bestimmung der Summen S_{2r} hergeleitet hat, gibt er (T. I, S. 131) die ausgerechneten Formeln bis zu $2r = 26$; nur wird jetzt

$$S_{2r} = \frac{2^{2r-2}}{(2r+1)!} C_{2r} \pi^{2r}$$

gesetzt, so daß $C_{2r} = 2A_{2r}$ ist. „Bis hierhin", sagt EULER, „hat man durch einen Kunstgriff, der an anderer Stelle erklärt werden wird, die Koeffizienten der Potenzen von π fortsetzen können. Ich habe diese Tabelle hier beigefügt, weil die beim ersten Anblick ganz regellose Reihe der Brüche $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{691}{105}, \frac{35}{1}$ usw. bei vielen Gelegenheiten sehr nützlich ist."

Welches sind die vielen Gelegenheiten? Die EULERsche Summationsformel ist schon erwähnt worden. Dazu kommen die Summen

$$1 - \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} - \frac{1}{4^{2r}} + \cdots = \frac{2^{2r}-1}{(2r+1)!} A_{2r} \pi^{2r},$$

die EULER wohl schon 1736 gefunden hatte und die auch in der *Introductio* wiederkehren. Genügt das, um von „vielen Gelegenheiten" zu sprechen? Man wird so zu der Vermutung gedrängt, daß EULER damals noch andere Eigenschaften jener Koeffizienten gekannt habe. Etwas darüber veröffentlicht hat er allerdings erst 1755 in den *Institutiones calculi differentialis*, denn hier wird (Pars II, Cap. 5, § 124 und folgende) eine neue Herleitung der Summen S_{2r} gegeben, bei der sich der Zusammenhang der Koeffizienten A_{2r} mit den sogenannten BERNOULLIschen Zahlen B_{2r} herausstellt[1]. EULER geht aus von der aus (T) folgenden Identität

$$\frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u} \operatorname{cotg} \pi u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - u^2}.$$

Werden auf der rechten Seite die Glieder nach steigenden Potenzen von u entwickelt, während links die von EULER bereits hergeleitete Potenzentwickelung eingesetzt wird, so entsteht die Formel:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2r-1}{(2r)!} B_{2r} u^{2r-2} = \sum_{r=1}^{\infty} S_{2r} u^{2r-2}.$$

---

1) Die Darstellung bei M. CANTOR, a. a. O. 3^2, S. 767 kann leicht zu Irrtümern Veranlassung geben. Wenn dieser sagt: „EULER nennt die Zahlen $[B_{2r}]$ nach dem Namen ihres Erfinders, JAKOB BERNOULLI, die *BERNOULLIschen Zahlen*", so wird man dem ganzen Zusammenhange nach vermuten, das solle heißen, EULER habe an dieser Stelle der *Institutiones* den Namen *BERNOULLIschen Zahlen* zuerst eingeführt. EULER selbst schreibt jedoch: „numeri qui ab inventore JACOBO BERNOULLIO vocari solent BERNOULLIANI". In der Tat hatte schon A. DE MOIVRE in den *Miscellanea analytica*, London 1730 (Complementum S. 19, 20, 21) den Namen *BERNOULLIsche Zahlen* eingeführt.

Da EULER die ersten 15 BERNOULLIschen Zahlen berechnet hatte[1]), so waren damit die Summen der reziproken Potenzen bis $2r = 30$ bekannt. Vielleicht ist dieses Verfahren der in der *Introductio* erwähnte „Kunstgriff", vielleicht aber hat EULER damals auch an das Verfahren gedacht, das er in der Abhandlung *De seriebus quibusdam considerationes* entwickelt hatte; eine Verweisung auf diese Abhandlung war 1748 nicht möglich, da sie erst 1750 erschienen ist.

So hat EULER nicht nur zuerst die Summen der reziproken geraden Potenzen der natürlichen Zahlen bestimmt, sondern auch den Zusammenhang der dabei auftretenden Koeffizienten mit anderen wichtigen Formeln der Analysis nachgewiesen. Seine Untersuchungen über diesen Gegenstand gehören zu den schönsten und tiefsten, mit denen uns sein Genius beschenkt hat.

Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord.

Année 1743. Tome second. Première Partie.

(115) *Démonstration de la somme de cette Suite*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + etc.$$

La méthode que j'ai donnée dans les *Commentaires de l'Académie de Pétersbourg*, pour trouver la somme de cette suite, lorsque l'exposant n est un nombre pair

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

a quelque chose d'extraordinaire, parcequ' elle est tirée d'un principe, dont on n'a pas encore fait beaucoup d'usage dans les recherches de cette nature. Elle est cependant aussi sûre et aussi fondée, que toute autre méthode, dont on se serve ordinairement, dans la sommation des Suites infinies: (116) ce que j'ai fait voir aussi par le parfait accord de quelques cas déjà connus d'ailleurs et par les approximations, qui nous fournissent une manière aisée d'examiner la vérité dans la pratique. Mais il semble aussi que cette méthode ait un très grand avantage, en ce qu'elle nous conduit en même tems à la connaissance d'une infinité d'autres Suites, dont les sommes ont été inconnües jusqu'à présent; pendant que les méthodes ordinaires ne nous découvrent presque rien sur ce genre de Suites. Plusieurs Géomètres ont honoré cette découverte de leur attention, en cherchant une démonstration du cas $n = 2$ auquel j'avois trouvé que la somme de cette suite

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

---

1) *Inst. Calc. diff.* Pars II, S. 420—421.

égaloit la sixième partie du quarré de la circonférence d'un cercle, dont le diamêtre est $= 1$. Ce cas leur sembloit d'abord d'autant plus remarquable que Feu Mr. JACQUES BERNOULLI, apres l'avoir cherché long tems en vain, l'avoit jugé d'une grande conséquence, pour perfectionner la Théorie des *séries infinies.*

Je communiquerai ici une méthode tout à fait différente de celle, par où j'y suis parvenu au commencement, (117) qui nous donnera par le moyen des intégrations la somme de la dite suite; mais qui ne peut être employé que dans ce seul cas; de sorte que la sommation des plus hautes puissances, selon toute apparence, ne peut etre achevée, que par ma première méthode générale. Cette méthode particulière, que je vais expliquer ici, pourra servir cependant tant pour confirmer d'avantage la générale, que pour faire voir la grande difficulté et presque l'impossibilité de traiter de la même manière les cas suivans, lorsque n est 4, ou 6 ou un autre nombre pair quelconq, si l'on voulait opérer selon les méthodes reçües dans la Theorie des suites.

Je considère un cercle, dont le rayon est $= 1$, duquel je prends un arc quelconq $= s$, dont le *sinus* soit $= x$: delà on aura par la nature du cercle $ds = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ et $s = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Si nous mettons à présent $x = 1$, l'arc s deviendra égal au quadrant du cercle, c'est à dire si nous exprimons la raison du diamêtre à la circonference par $1 : \pi$ l'arc s sera égal à $\frac{\pi}{2}$ au cas que $x = 1$. Il est clair que j'emploie la lettre π pour marquer le nombre de LUDOLF A KEULEN 3,14159265 etc. Soit maintenant proposée cette formule différen-(118)tielle $sds = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ dont l'intégral sera $= \frac{ss}{2}$, et si l'on fait après l'intégration $x = 1$, l'intégral sera $= \frac{\pi\pi}{8}$. Cherchons à présent par la méthode ordinaire l'intégral de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ et convertissons l'intégral $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ selon les règles connües dans une série infinie, et nous aurons:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = x + \frac{1}{2.3} x^3 + \frac{1.3}{2.4.5} x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} x^9 + \text{etc.}$$

Cette suite substituée à la place de $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ donnera

$$sds = \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1}{2.3} \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1.3}{2.4.5} \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \frac{x^7 dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} \frac{x^9 dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \text{etc.}$$

De cette suite chaque terme est absolument intégrable; car l'intégral du premier terme est $1 - \sqrt{(1-xx)}$ pris de cette façon, qu'il s'évanouisse en mettant $x = 0$, ainsi que demande la (119) nature de la question par laquelle l'intégral de sds doit s'évanouir en faisant $x = 0$. Le premier terme étant intégrable, tous les suivants le seront aussi, parceque l'intégration de chaque terme se réduit a l'intégration du précédent. On verra cela clairement, si l'on fait réflexion, qu'il y a généralement

$$\int \frac{x^{n+2}\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{n+1}{n+2} \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} - \frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{(1-xx)}.$$

Mais comme nous cherchons seulement l'intégral de sds au cas $x = 1$, faisons dans le membre $-\frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{(1-xx)}$ qui est algébrique $x = 1$, et nous aurons pour ce cas $x = 1$ cette réduction générale

$$\int \frac{x^{n+2}\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{n+1}{n+2} \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}.$$

Delà nous tirerons les intégrals de tous les termes de notre suite pour le cas $x = 1$, comme l'on verra dans cette table:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1 - \sqrt{(1-xx)} = 1 \text{ (faisant } x = 1)$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2}{3} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2}{3},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{4}{5} \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2.4}{3.5},$$

(120) $$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{6}{7} \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2.4.6}{3.5.7},$$

$$\int \frac{x^9\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{8}{9} \int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}$$

et ainsi de suite.

Mais par la *série* donnée pour sds, nous avons l'intégration achevée,

$$\frac{ss}{2} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1}{2.3}\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1.3}{2.4.5}\int \frac{x^5dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\int \frac{x^7dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \text{etc.}$$

$= \frac{\pi\pi}{8}$ après avoir fait $x = 1$, auquel cas devient $s = \frac{\pi}{2}$, comme nous l'avons vû. Nous n'avons dont qu'à multiplier chaque intégral par son coefficient numérique, pour trouver cette *série*

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{7.7} + \frac{1}{9.9} + \text{etc.}$$

qui ne contient dans les dénominateurs que les quarrés des nombres impairs, les numérateurs demeurant par tout égaux à l'unité. La somme de ces fractions à l'infini sera par conséquence égale à $\frac{\pi\pi}{8}$, qui est la même, que j'ai trouvée par ma méthode générale pour cette suite. Delà nous tirerons à présent aisément la somme de celle-ci

(121) $$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{etc.}$$

de laquelle si l'on ôte son quart, qui est

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\text{etc.}$$

tous les quarrés pairs s'en iront, et on aura celle-ci

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\text{etc.}$$

qui contient par conséquent les trois quarts de l'autre

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}$$

de sorte que nous avons pour la sommation de celle-ci

$$\frac{\pi\pi}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{etc.}$$

ainsi que j'avois trouvé par l'autre méthode générale expliquée dans les *Commentaires de l'Académie imp. de Pétersbourg au Tome VII.*

Comme nous sommes parvenu par le moïen de ce calcul à la suite des quarrés impairs

$$\frac{\pi\pi}{8}=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\text{etc.}$$

de laquelle nous avons tiré d'abord par une juste conséquence la suite de tous les quarrés

(122) $$\frac{\pi\pi}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\text{etc.},$$

je puis aussi par un calcul un peu différent immediatément trouver la somme celle-ci, dont celle-là comprendra trois quarts. Pour parvenir à ce but, je cherche une autre *série* commode qui m'exprimera l'intégral de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ généralement pour toute valeur possible du sinus x. En cette vüe je pose $dy=\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ dont j'obtiens cette équation

$$dy\sqrt{(1-xx)}=dx\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

qui différentiée en mettant dx constant, donnera

$$ddx(1-xx)-xdxdy=dx^2.$$

Cette équation, quoique différentielle du second degré, est très commode pour exprimer la valeur de y par une *série*, qui procède selon les puissances d'x. Pour trouver cette *série* supposons connu d'ordinaire

$$y = \alpha xx + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 + \varepsilon x^{10} + \text{etc.}$$

où nous commençons d'abord par le quarré d'x, parceque nous voïons de l'équation $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ que mettant x infiniment (123) petit, dy devient égal à xdx et par conséquent $y = xx$. Ensuite nous faisons croitre par tant les exposans d'x de deux, parceque dans l'équation *différentio-différentielle*

$$ddy\,(1 - xx) - xdxdy = dx^2$$

les x et dx remplissent par tout deux dimensions. De cette équation supposée nous tirons

$$\frac{dy}{dx} = 2\alpha x + 4\beta x^3 + 6\gamma x^5 + 8\delta x^7 + \text{etc.}$$

et en différentiant la seconde fois posant dx constant

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2\alpha + 3\,.\,4\beta x^2 + 5\,.\,6\gamma x^4 + 7\,.\,8\delta x^6 + \text{etc.}$$

Mais en divisant l'équation différentio-différentielle par dx^2, nous avons

$$\frac{ddy}{dx^2} - \frac{xxddy}{dx^2} - \frac{xdy}{dx} - 1 = 0$$

qui substituant pour $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{ddy}{dx^2}$ les valeurs trouvées donne

$$\left.\begin{array}{l} +2\alpha + 3.4\beta x^2 + 5\,.\,6\gamma x^4 + 7\,.\,8\delta x^6 + \text{etc.} \\ \qquad -2\alpha x^2 \quad -3\,.\,4\beta x^4 - 5\,.\,6\gamma x^6 - \text{etc.} \\ \qquad -2\alpha x^2 \quad -4\beta x^4 \quad -6\gamma x^6 - \text{etc.} \end{array}\right\} = 1$$

(124)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \beta &= \frac{2.2.\alpha}{3.4} = \frac{2.2}{2.3.4} \\ \gamma &= \frac{4.4.\beta}{5.6} = \frac{2.2.4.4}{2.3.4.5.6} \\ \delta &= \frac{6.6.\gamma}{7.8} = \frac{2.2.4.4.6.6}{2.3.4.5.6.7.8} \\ \varepsilon &= \frac{8.8.\delta}{9.10} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8}{2.3.4.5.6.7.8.9.10} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Aïant trouvé ces nombres, on aura

$$y = \frac{ss}{2} = \frac{xx}{2} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{8} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\frac{x^{10}}{10} + \text{etc.}$$

A présent cherchons par le moïen de cette suite en la multipliant par $ds = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ l'intégral de $\frac{ssds}{2}$ qui sera

$$\frac{s^3}{6} = \frac{1}{2}\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{2}{3.4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{2.4}{3.5.8}\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{2.4.6}{3.5.7.8}\int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \text{etc.}$$

et prenons ces intégrals seulement dans le cas $x = 1$ auquel nous aurons

$$s = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{s^3}{6} = \frac{\pi^3}{48}.$$

Mais tous ces intégrals se réduisent par la réduction générale donnée à celle-ci (125) $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ qui dans le cas $x = 1$ devient $= \frac{\pi}{2}$ et par conséquent les autres seront

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{3}{3}\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{5}{6}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\pi}{2}$$

etc.

Multiplions chaque intégral par son coefficient qui lui convient dans la *série* égale à $\frac{s^3}{6}$ ou dans notre cas à $\frac{\pi^3}{48}$ et nous aurons

$$\frac{\pi^3}{48} = \frac{1}{2.2}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4.4}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{6.6}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8.8}\,\frac{\pi}{2} + \text{etc.}$$

Divisons de part et d'autre par $\frac{\pi}{2}$ et multiplions par 4 ce qui donnera

$$\frac{\pi^3}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

de sorte que nous sommes parvenus à la somme de cette suite sans avoir eu besoin de la conclure de l'autre

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.}$$

(126.) Ces deux méthodes toutes faciles qu'elles sont, mériteroient une plus grande attention, si elles se pouvoient employer également pour trouver les sommes des plus hautes puissances paires, qui sont toutes comprises dans mon autre méthode générale tirée de la considération des racines d'une équation infinie. Mais malgré toute la peine que je me suis donnée pour trouver seulement la somme des biquarrés

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}$$

je n'ai pas encore pu réussir dans cette recherche, quoique la somme par l'autre méthode me soit connue laquelle est $= \frac{\pi^4}{90}$. Par faciliter la peine, que d'autres peut-être se donneront, dans cette affaire, j'y joindrai les sommes de toutes les puissances paires, que j'ai trouvées par l'autre méthode:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = \frac{2}{1.2.3}\,\frac{1}{2}\,\pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{2^3}{1.2.3.4.5}\,\frac{1}{6}\pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = \frac{2^5}{1.2.3\ldots7}\,\frac{1}{6}\,\pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = \frac{2^7}{1.2.3\ldots9}\,\frac{3}{10}\pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \text{etc.} = \frac{2^9}{1.2.3\ldots11}\,\frac{5}{6}\pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \text{etc.} = \frac{2^{11}}{1.2.3\ldots13}\,\frac{691}{210}\pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \text{etc.} = \frac{2^{13}}{1.2.3\ldots15}\,\frac{35}{2}\pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \frac{1}{5^{16}} + \text{etc.} = \frac{2^{15}}{1.2.3\ldots17}\,\frac{3617}{30}\pi^{16}$$

$$1 + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{3^{18}} + \frac{1}{4^{18}} + \frac{1}{5^{18}} + \text{etc.} = \frac{2^{17}}{1.2.3\ldots19}\,\frac{43867}{42}\pi^{18}$$

$$1 + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{4^{20}} + \frac{1}{5^{20}} + \text{etc.} = \frac{2^{19}}{1.2.3\ldots21}\,\frac{1222277}{110}\pi^{20}$$

$$1 + \frac{1}{2^{22}} + \frac{1}{3^{22}} + \frac{1}{4^{22}} + \frac{1}{5^{22}} + \text{etc.} = \frac{2^{21}}{1.2.3\ldots23}\,\frac{854513}{6}\pi^{22}$$

$$1 + \frac{1}{2^{24}} + \frac{1}{3^{24}} + \frac{1}{4^{24}} + \frac{1}{5^{24}} + \text{etc.} = \frac{2^{23}}{1.2.3\ldots25}\,\frac{1181820455}{546}\pi^{24}$$

$$1 + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \frac{1}{4^{26}} + \frac{1}{5^{26}} + \text{etc.} = \frac{2^{25}}{1.2.3\ldots27}\,\frac{76977927}{2}\pi^{26}.$$

La loi que ces expressions tiennent, est en partie si connüe qu'elle n'a pas besoin d'explication. La seule difficulté qui se trouve, est dans les fractions, qui sont représentées en des caractères differens

$$\frac{1}{2}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{3}{10}\quad \frac{5}{6}\quad \frac{691}{210}\quad \frac{35}{2}\quad \text{etc.}$$

(127) mais j'ai déjà donné deux méthodes différentes pour trouver ces fractions encore plus loin.